

NOTIONS DE DENOMBREMENT

**A. Ensemble fini – cardinal d'un ensemble fini**

Définition	<p><math>n \in \mathbb{N}^*</math> ; E est un ensemble qui contient n éléments . On dit que E est un ensemble fini .</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Le nombre n s'appelle le cardinal de E on note <b>cardE = n</b> avec <b>card∅ = 0</b></li> </ul>
propriétés	<p><math>cardE \cup F = cardE + cardF - cardE \cap F</math> ; <math>cardE \times F = cardE \times cardF</math> ; <math>E \neq \emptyset</math> et <math>F \neq \emptyset</math></p> <p><math>card\bar{A} = cardE - cardA</math> ; <math>A \subset E</math> ( A est une partie de E ) et <math>\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}</math></p> <p>On a <math>A \cap \bar{A} = \emptyset</math> et <math>A \cup \bar{A} = E</math>.</p>

**B. Principe fondamental de dénombrement**

principe	<p>On considère une expérience comporte p choix ( étape ) avec <math>(p \in \{1, 2, 3, \dots\})</math> .</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Si le choix n° 1 se fait avec <math>n_1</math> manières différentes .</li> <li>Si le choix n° 2 se fait avec <math>n_2</math> manières différentes .</li> <li>.....</li> <li>Si le choix n° p se fait avec <math>n_p</math> manières différentes .</li> </ul> <p>Alors le nombre total des manières des p choix est <b><math>n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p</math></b></p>
----------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

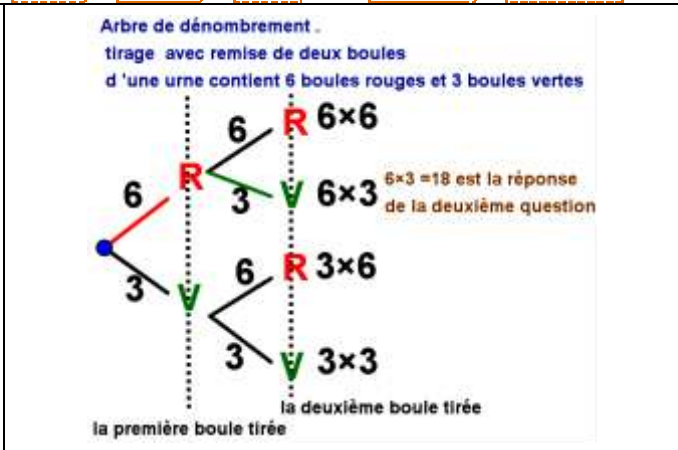
**C. Arrangement avec répétition de p éléments parmi n éléments**

Définition	Ordonné p éléments avec répétition parmi n éléments ( répétition = avec possibilité de répéter les éléments ) s'appelle arrangement avec répétition de p éléments parmi n éléments
------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Propriété	Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments est le nombre <b><math>n^p</math></b>
-----------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

remarque	<p>On représente <b>une arrangement avec répétition</b> de p éléments parmi les éléments suivants <math>x_1</math> et <math>x_2</math> et <math>x_3</math> et .... <math>x_n</math> par :</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border: 1px dashed orange;">Numéro du classement ( N° d'ordre ) →</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>.....</td> <td>p-1</td> <td>p</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px dashed orange;">L'élément qui a ce classement ( On a le droit de répéter les éléments ) →</td> <td><math>x_5</math></td> <td><math>x_2</math></td> <td><math>x_7</math></td> <td>.....</td> <td><math>x_7</math></td> <td><math>x_3</math></td> </tr> </table>	Numéro du classement ( N° d'ordre ) →	1	2	3	.....	p-1	p	L'élément qui a ce classement ( On a le droit de répéter les éléments ) →	$x_5$	$x_2$	$x_7$	.....	$x_7$	$x_3$
Numéro du classement ( N° d'ordre ) →	1	2	3	.....	p-1	p									
L'élément qui a ce classement ( On a le droit de répéter les éléments ) →	$x_5$	$x_2$	$x_7$	.....	$x_7$	$x_3$									

Modèle d'une urne ou un sac contient ( des boules ou des jetons ou des pions )	<p>Une urne contient n boules lorsque on tire p boules l'une après l'autre et avec remise ( càd la boule tiré doit être remettre à l'urne avant de tiré la boule suivante ) on dit tirage avec remise .</p> <p>Exemple :une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes.</p> <p>Questions :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Quel le nombre des tirages possibles ?</li> <li>Quel le nombre des tirages tel que la première boule tirée est rouge et la 2<sup>ème</sup> est verte ?</li> </ol> <p><b>Réponse :</b> 1<sup>ère</sup> Question. <b><math>9^2</math></b> ; 2<sup>ème</sup> Q <b><math>6 \times 3</math></b></p>
--------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



**D. Arrangement sans répétition de p éléments parmi n éléments**

Définition	Ordonné p éléments sans répétition parmi n éléments ( c.à.d. pas de possibilité de répéter les éléments ) s'appelle arrangement sans répétition de p éléments parmi n éléments
------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Propriété	<p>Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments est le nombre :</p> <p><b><math>A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}</math></b> .( avec <math>0 \leq p \leq n</math> et <math>n \in \mathbb{N}</math> et <math>p \in \mathbb{N}</math> )</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Le nombre suivant : <math>1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n</math> par <b><math>n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n</math></b> on lit :</li> <li>factoriel n (<math>n \in \mathbb{N}^*</math> ) avec <b><math>0! = 1</math> ; <math>1! = 1</math></b>.</li> </ul>
-----------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Remarques	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>A_n^0 = 1</math> et <math>A_n^1 = n</math> et <math>A_n^2 = \underbrace{n(n-1)}_2</math> et <math>A_n^3 = \underbrace{n(n-1)(n-2)}_3</math></li> <li>On représente un arrangement sans répétition de <math>p</math> éléments parmi les éléments suivants <math>x_1</math> et <math>x_2</math> et <math>x_3</math> et .... <math>x_n</math> par :                     <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px; margin-right: 10px;">Numéro du classement (N° ordre) →</div> <div style="display: flex; gap: 10px;"> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">1</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">2</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">3</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">....</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">p-1</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">p</div> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px; margin-right: 10px;">L'élément qui a ce classement ( On obtient un arrangement sans répétition ) →</div> <div style="display: flex; gap: 10px;"> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;"><math>x_5</math></div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;"><math>x_2</math></div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;"><math>x_7</math></div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">....</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;"><math>x_1</math></div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;"><math>x_3</math></div> </div> </div> </li> </ul>
Modèle d'une urne ou un sac contient ( des boules ou des jetons ou des pions )	<p>Une urne contient <math>n</math> boules lorsque on tire <math>p</math> boules l'une après l'autre et sans remise ( càd la boule tiré doit être à l'extérieur de l'urne avant de tiré la boule suivante ) on dit tirage sans remise .</p> <p>Exemple : une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes .</p> <p>Questions :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Quel le nombre des tirages possibles ?</li> <li>Quel le nombre des tirages tel que les deux boules sont vertes ?</li> </ol> <p><b>Réponse :</b> 1<sup>ère</sup> Q. <math>A_9^2 = 9 \times 8</math> 2<sup>ème</sup> Q <math>A_3^2 = 3 \times 2</math></p>
	<p>Arbre de dénombrement . tirage sans remise de deux boules d'une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes</p> <p>la première boule tirée</p>
<b>E.</b> Permutation de $n$ élément càd : arrangement sans répétition de $n$ éléments parmi $n$ éléments	
Définition	Ordonné $n$ éléments sans répétition parmi $n$ éléments ( c.à.d. pas de possibilité de répéter les éléments ) s'appelle permutation de $n$ éléments
Propriété	Le nombre des permutation de $n$ éléments est le nombre $A_n^n = n!$ . ( avec $n \in \mathbb{N}$ )
Remarques	<p>On représente une permutation de <math>n</math> éléments parmi les éléments : <math>x_1</math> et <math>x_2</math> et .. <math>x_n</math> par</p> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px; margin-right: 10px;">Numéro du classement →</div> <div style="display: flex; gap: 10px;"> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">1</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">2</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">3</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">....</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">n-1</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">n</div> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px; margin-right: 10px;">L'élément qui a ce classement → ( On obtient une permutation )</div> <div style="display: flex; gap: 10px;"> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;"><math>x_4</math></div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;"><math>x_2</math></div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;"><math>x_8</math></div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">....</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;"><math>x_1</math></div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;"><math>x_{n-3}</math></div> </div> </div>
<b>F.</b> Combinaison de $p$ éléments parmi $n$ éléments	
Définition	$E$ est un ensemble fini ( <b>card</b> $E = n$ ) toute partie $A$ de $E$ contient $p$ éléments ( avec $(p \leq n)$ ) s'appelle combinaison de $p$ éléments parmi $n$ éléments
Propriété	<p>Le nombre des combinaisons <math>p</math> éléments (<math>p \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}</math>) parmi <math>n</math> éléments est le nombre entier naturel :</p> $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}^p}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p}$ <p>avec <math>0 \leq p \leq n</math> et <math>n \in \mathbb{N}</math> et <math>p \in \mathbb{N}</math> )</p>
Remarques	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>C_n^p = C_n^{n-p}</math> et <math>C_n^0 = C_n^n = 1</math> et <math>C_n^1 = C_n^{n-1} = n</math></li> <li>relation de Pascal : <math>C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}</math> avec <math>n \in \mathbb{N}</math> et <math>p \in \mathbb{N}</math> et <math>0 \leq p \leq n-1</math></li> <li>binôme de Newton :                     <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall n \in \mathbb{N}^* : (a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^0</math></li> <li><math>\forall n \in \mathbb{N}^* : (a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}</math> ( car <math>a+b = b+a</math> )</li> </ul> </li> </ul>

<b>G. Expérience aléatoire</b>	
Vocabulaire	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expérience aléatoire : toute expérience dont ses résultats sont connus mais on ne pas donner le résultat de l'expérience avant de réaliser l'expérience ; on l'appelle expérience aléatoire .</li> <li>Les résultats obtenues par cette expérience aléatoire on les note par <math>\omega_1</math> puis <math>\omega_2</math> puis <math>\omega_3</math> ..... <math>\omega_n</math> ( on général <math>\omega_i</math> avec <math>i \in \{1, 2, \dots; n\}</math> ) .</li> <li>Eventualité ( ou événement élémentaire ) : chaque <math>\omega_i</math> s'appelle une eventualité ou un événement élémentaire .</li> <li>Univers : les eventualités ( ou les événements élémentaires ) constituent un ensemble s'appelle univers noté <math>\Omega = \{\omega_1; \omega_2, \dots, \omega_n\}</math> .</li> <li>Evènement : toute partie A de <math>\Omega</math> s'appelle évènement .             <ul style="list-style-type: none"> <li>Si <math>A = \Omega</math> alors l'évènement <math>\Omega</math> s'appelle évènement certain .</li> <li>Si <math>A = \emptyset</math> alors l'évènement <math>\emptyset</math> s'appelle évènement impossible .</li> <li>Si <math>A = \{\omega_i\}</math> alors l'évènement <math>\{\omega_i\}</math> s'appelle évènement élémentaire .</li> <li>Si <math>A \cap B = \emptyset</math> on dit que A et B sont deux événements incompatibles</li> <li>Si <math>A \cap B = \emptyset</math> et <math>A \cup B = \Omega</math> alors B s'appelle l'évènement contraire de A ( vis versa ) on note <math>B = \bar{A}</math> ( de même <math>A = \bar{B}</math> ) . remarque <math>\text{card}A + \text{card}\bar{A} = \text{card}\Omega</math></li> <li>L'évènement <math>A \cap B</math> est l'ensemble constitué par des eventualités réaliser à la fois par les événements A et B .</li> <li>L'évènement <math>A \cup B</math> est l'ensemble constitués par des eventualités réaliser soit par l'évènement A ou par l'évènement B .</li> <li>Les événements <math>A_1</math> et <math>A_2</math> et <math>A_3, \dots, A_p</math> est une partition de <math>\Omega</math> s'ils sont disjoints deux à deux et <math>A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = \Omega</math> .</li> </ul> </li> </ul>
<b>H. Probabilité sur <math>\Omega</math> l'univers d'une expérience aléatoire</b>	
Définition	<p>Soit <math>\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}</math> univers des eventualités d'une expérience aléatoire .</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Lorsque on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions si <math>n_i</math> est le nombre de fois on a obtenue <math>\omega_i</math> . Le nombre <math>\frac{n_i}{N}</math> s'appelle la probabilité de l'évènement élémentaire <math>\{\omega_i\}</math> on note <math>p_i = p(\{\omega_i\}) = \frac{n_i}{N}</math> sans oublier <math>p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1</math> .</li> <li>Probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A on note <math>p(A)</math> ( exemple : <math>A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_7\}</math> donc <math>p(A) = p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_3\}) + p(\{\omega_7\})</math> )</li> </ul>
Propriétés	<p>A et B sont deux événements d'un univers <math>\Omega</math> d'une expérience aléatoire</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall A \in \Omega : 0 \leq p(A) \leq 1</math> et <math>p(\Omega) = 1</math> et <math>p(\emptyset) = 0</math> et</li> <li><math>p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)</math> et <math>p(\bar{A}) = 1 - p(A)</math></li> </ul>
<b>I. Hypothèse d'équiprobabilité</b>	
	<p>Si dans une expérience aléatoire ( dont l'univers est <math>\Omega</math> ) tous les événements élémentaires <math>A = \{\omega_i\}</math> ont même probabilité ( c.à.d. <math>p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = p(\{\omega_3\}) = \dots = p(\{\omega_n\})</math> ) alors probabilité d'un évènement A de <math>\Omega</math> est <math>p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}</math></p>
<b>J. Probabilité conditionnelle – Deux événements indépendants - les probabilités composées</b>	
	<p>A et B sont deux événements d'un univers <math>\Omega</math> d'une expérience aléatoire .</p>

- Probabilité de l'événement B sachons que l'événement A est réalisé est  $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$  on la note par  $p_A(B)$  ou par  $p(B/A)$  donc on a  $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$
- A et B sont deux événements indépendants si  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$  ou  $p_A(B) = p(B)$
- $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$  l'écriture :  $p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = p(B)p_B(A)$  s'appelle la formule du probabilité composée .

**K.** variables aléatoire – loi de probabilité – espérance mathématique – variance – écart-type

$\Omega$  est univers d'une expérience aléatoire toute fonction X définie par :

$$X : \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega_i \mapsto X(\omega_i) = x_i$$

S'appelle variable aléatoire définie sur  $\Omega$  .

**Vocabulaire :**

- les valeurs  $x_1$  et  $x_2$  et  $x_3$  et ..... et  $x_p$  sont appelées les valeurs du variable aléatoire X
- ensembles des valeurs noté par  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ .
- $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$  donc  $(X = x_i)$  présente un événement c.à.d.  $(X = x_i) \subset \Omega$  .
- L'écriture  $p(X = x_i)$  signifie probabilité de l'événement  $(X = x_i)$ .
- **Loi de probabilité de X :** c'est de calculer toutes les probabilités  $p(X = x_i)$  avec  $x_i \in X(\Omega)$
- On peut donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme d'un tableau :

$x_1$	$x_1$	$x_2$	.....	$x_p$
$p(X = x_1)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	.....	$p(X = x_p)$

- Le nombre :  $\sum_{i=1}^{i=n} x_i \times p(X = x_i) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \dots + x_n \times p(X = x_n)$  s'appelle l'espérance mathématique du variable aléatoire X ; on note  $E(X)$  .
- Le nombre  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$   
 $= (x_1)^2 \times p(X = x_1) + (x_2)^2 \times p(X = x_2) + \dots + (x_n)^2 \times p(X = x_n) - [E(X)]^2$  s'appelle la variance du variable aléatoire X ; on note  $V(X)$  . remarque  $V(X) \geq 0$  .
- Le nombre :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$  s'appelle l'écart-type ; du variable aléatoire X . on note  $\sigma(X)$

**L.** Loi binomiale ou distribution binomiale

Soit p est la probabilité de l'événement A d'une expérience aléatoire (seulement une fois)

- On répète cette expérience n fois ( dont les mêmes conditions de départ )
- On considère la variable aléatoire X définie de la manière suivante « le nombre de fois tel que l'évènement A est réalisé après la répétition de l'expérience de départ n fois »
- Ensemble des valeurs de X est  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
- X est appelé loi binomiale ( ou distribution ) de paramètres n et p on note  $X = B(n, p)$  .

On a :  $\forall k \in X(\Omega) : p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$  ,  $E(X) = np$  ,  $V(X) = n \times p \times (1-p)$

définitions

Loi binomiale ou distribution